

## Un calcul élémentaire de décimales de $\pi$

On admet que  $\pi$  est irrationnel.

**1.** Soit  $\sum_{n \geq 0} u_n$  une série à termes rationnels convergente, dont la somme  $s$  est telle que  $\forall p \in \mathbf{N} \quad 10^p s \notin \mathbf{Z}$ . Soit  $E : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{Z}$  la fonction « partie entière » définie par  $\forall x \in \mathbf{R} \quad E(x) \leq x < 1 + E(x)$ . Soit  $s_n = \sum_{k=0}^n u_k$  la suite des sommes partielles. Alors, pour tout  $p \in \mathbf{N}$ ,  $E$  est continue au point  $10^p s \notin \mathbf{Z}$ , donc  $E(10^p s_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} E(10^p s)$ , et donc la suite d'entiers  $E(10^p s_n)$  est stationnaire : il existe  $n_p \in \mathbf{N}$  tel que pour tout  $n \geq n_p$   $E(10^p s_n) = E(10^p s)$  i.e. tel que pour tout  $n \geq n_p$   $s_n$  et  $s$  aient mêmes  $p$  premiers chiffres décimaux.

Si de plus la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  est alternée de valeur absolue décroissante (vers 0), alors pour  $n$  tel que  $E(10^p s_n) = E(10^p s_{n+1})$ , on a  $\forall k \geq n \quad E(10^p s_k) = E(10^p s)$  car les segments  $[s_k, s_{k+1}]$  ( $k \geq 0$ ) sont emboîtés d'intersection  $\{s\}$ .

En pratique on pourra chercher un  $n$  tel que  $10^p |u_n| < 1$  (condition nécessaire pour que  $E(10^p s_n) = E(10^p s_{n+1})$ ) puis, si  $n$  ainsi obtenu ne convient pas, l'augmenter jusqu'à obtenir  $n_p$ .

**2.** Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  une suite de réels non nuls. On pose  $s_n = \sum_{k=0}^n u_k$  comme en **1**. On écrit  $u_n = a_n c_n$  et on pose  $b_n = \frac{c_{n+1}}{c_n}$ . Soient les fonctions affines  $f_k : x \rightarrow a_k + b_k x$  et leur composée  $g_n = f_0 \circ f_1 \circ \dots \circ f_n$ . Alors  $g_n(x) = \frac{1}{c_0}(s_n + x c_{n+1})$ . En effet  $g_n$  est a priori affine de la forme  $g_n(x) = g_n(0) + b_0 b_1 \dots b_n x = g_n(0) + x \frac{c_{n+1}}{c_0}$  et telle que  $g_n = g_{n-1} \circ f_n$ , donc de même  $g_n(0) = g_{n-1}(f_n(0)) = g_{n-1}(a_n) = g_{n-1}(0) + \frac{1}{c_0} a_n c_n = \dots = g_0(0) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{c_0} a_k c_k = \frac{1}{c_0} \sum_{k=0}^n a_k c_k$  (car  $g_0 = f_0$  et  $f_0(0) = a_0$ ).

En particulier  $s_n = c_0 g_n(0)$  et  $s_{n+1} = c_0 g_n(a_{n+1})$  (utile précédemment en fin de **1**, pour augmenter  $n$ ).

Ce calcul de  $s_n$  par méthode de Hörner est adapté au cas où les  $a_n$  et les  $b_n$  ont des expressions simples comme ci-dessous.

**3.** La fraction  $f(t) = \frac{1}{1+t^2} + \frac{1}{1+(1-t)^2}$ , invariante par  $t \rightarrow 1-t$ , s'exprime en fonction de  $s = t(1-t)$  :

$$f(t) = \frac{3-2s}{2-2s+s^2} = \frac{(3-2s)(2+2s+s^2)}{(2+s^2)^2-4s^2} = \frac{6+2s-s^2-2s^3}{4+s^4} \quad \text{si } t \in [0,1] \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+1}} (6+2s-s^2-2s^3) s^{4n}$$

D'où par intégration terme à terme d'une série de fonctions continues normalement convergente sur  $[0, 1]$

$$\pi = 2 \int_0^1 f(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \quad \text{avec} \quad u_n = \frac{(-1)^n}{4^{n+1}} \int_0^1 (12+4s-2s^2-4s^3) s^{4n} dt$$

On observe en passant que, comme  $s \in [0, \frac{1}{4}]$  pour  $t \in [0, 1]$ ,  $12+4s-2s^2-4s^3 > 0$  pour  $t \in [0, 1]$  et qu'on a donc affaire à une série alternée dont la valeur absolue du terme général décroît. De plus, comme  $12+4s-2s^2-4s^3$  a pour maximum  $\frac{205}{16}$  quand  $t$  décrit  $[0, 1]$ , maximum atteint pour  $t = \frac{1}{2}$  avec  $s(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$ , on a par inégalité triangulaire<sup>1</sup>  $|u_n| < \frac{205}{2^{2n+6}} J_{4n} < \frac{205}{2^{10n+6}}$  en posant

$$J_p = \int_0^1 t^p (1-t)^p dt \stackrel{\text{I.P.P.s}}{=} \dots p!^2 \int_0^1 \frac{t^{p+k}}{(p+k)!} \frac{(1-t)^{p-k}}{(p-k)!} dt \stackrel{\text{I.P.P.s}}{=} \dots = \frac{p!^2}{(2p+1)!} = \frac{p!}{2^p (2p+1)!}$$

On obtient ainsi

$$u_n = \frac{(-1)^n}{4^{n+1}} (12J_{4n} + 4J_{4n+1} - 2J_{4n+2} - 4J_{4n+3})$$

ce qui donne après mise en facteur de  $J_{4n}$  et réduction au même dénominateur

$$u_n = a_n c_n \quad \text{avec} \quad a_n = 330 + 1804n + 3066n^2 + 1640n^3, \quad c_n = \frac{(-2^{-6})^n (4n)!}{(8n+7)!} \quad \text{et} \quad b_n = \frac{c_{n+1}}{c_n} = -2^{-6} \prod_{j=4n+1}^{4n+4} \frac{j}{7+2j}$$

On est donc dans les conditions des paragraphes **1**. et **2**.

Comme la série  $\sum_{n \geq 0} u_n$  est à termes rationnels non nuls, alternée et que la suite  $(|u_n|)$  décroît vers 0, on obtient  $p$  décimales de sa somme irrationnelle  $\pi$  comme indiqué en **1**. et **2**, à partir d'une somme partielle  $s_n = \sum_{k=0}^n u_k$  : comme  $|u_n| < \frac{205}{2^{10n+6}}$  on peut chercher  $n \geq \frac{p}{3}$  et procéder comme en **2**. avec ici  $c_0 = \frac{1}{105}$

On peut ainsi obtenir à partir d'OCaml et de la bibliothèque zarith (fondée sur Gnu gmp) et éventuellement d'un peu de parallélisme les 100 premiers millions de décimales de  $\pi$  en moins de 6 minutes sur MacBook Pro M1.

<sup>1</sup> inégalités strictes car la fonction  $t \rightarrow s$  est continue et  $t \rightarrow 12+4s-2s^2-4s^3$  non constante sur  $[0, 1]$ ; voir **4**. pour un équivalent de  $J_p$

4. D'une part d'après 3.  $|u_n| < \frac{205}{2^{2n+6}} J_{4n}$  et  $u_n \sim (-1)^n \frac{205}{2^{2n+6}} J_{4n}$  car  $u_n = a_n c_n$  avec

$$a_n = 330 + 1804n + 3066n^2 + 1640n^3 \sim 1640n^3 \quad \text{et} \quad c_n = \frac{(-1)^n J_{4n}}{2^{2n}(8n+3)(8n+5)(8n+7)} \sim \frac{(-1)^n J_{4n}}{2^{2n+9}n^3}$$

D'autre part

$$\sqrt{p} 4^p J_p = \sqrt{p} 4^p \int_0^1 t^p (1-t)^p dt \stackrel{t=\frac{1}{2}\left(1+\frac{x}{\sqrt{p}}\right)}{=} \int_0^{\sqrt{p}} \left(1 - \frac{x^2}{p}\right)^p dx$$

Or la suite croissante de fonctions continues sur  $\mathbf{R}_+$  (strictement croissante sur  $\mathbf{R}_+^*$ )

$$x \longrightarrow \left(1 - \frac{x^2}{p}\right)^p \quad \text{si } x \in [0, \sqrt{p}] , \quad 0 \text{ sinon}$$

converge simplement sur  $\mathbf{R}_+$  vers la fonction continue  $x \rightarrow e^{-x^2}$ . Donc par théorème de convergence monotone

$$\sqrt{p} 4^p J_p \stackrel{p \rightarrow \infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \text{en croissant strictement}$$

Donc

$$J_p < 2^{-(2p+1)} \sqrt{\frac{\pi}{p}} \quad \text{et} \quad J_p \stackrel{p \rightarrow \infty}{\sim} 2^{-(2p+1)} \sqrt{\frac{\pi}{p}}$$

Donc

$$|u_n| < \frac{205}{2^{10n+8}} \sqrt{\frac{\pi}{n}} \quad \text{et} \quad u_n \sim (-1)^n \frac{205}{2^{10n+8}} \sqrt{\frac{\pi}{n}}$$

5. On peut aussi en 4. ramener  $J_p$  à une intégrale de Wallis :

$$4^p J_p = 4^p \int_0^1 t^p (1-t)^p dt \stackrel{t=\frac{1}{2}(1+\sin \theta)}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^\alpha \theta d\theta \quad \text{avec} \quad \alpha = 2p+1$$