

Un calcul élémentaire de décimales de π

On admet que π est irrationnel.

1. Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série à termes rationnels convergente, dont la somme s est telle que $\forall p \in \mathbf{N} \quad 10^p s \notin \mathbf{Z}$. Soit $E : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{Z}$ la fonction « partie entière » définie par $\forall x \in \mathbf{R} \quad E(x) \leq x < 1 + E(x)$. Soit $s_n = \sum_{k=0}^n u_k$ la suite des sommes partielles. Alors, pour tout $p \in \mathbf{N}$, E est continue au point $10^p s \notin \mathbf{Z}$, donc $E(10^p s_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} E(10^p s)$, et donc la suite d'entiers $E(10^p s_n)$ est stationnaire : il existe $n_p \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geq n_p$ $E(10^p s_n) = E(10^p s)$ i.e. tel que pour tout $n \geq n_p$ s_n et s aient mêmes p premiers chiffres décimaux.

Si de plus la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est alternée de valeur absolue décroissante (vers 0), alors pour n tel que $E(10^p s_n) = E(10^p s_{n+1})$, on a $\forall k \geq n \quad E(10^p s_k) = E(10^p s)$ car les segments $[s_k, s_{k+1}]$ ($k \geq 0$) sont emboîtés d'intersection $\{s\}$.

En pratique on pourra chercher un n tel que $10^p |u_n| < 1$ (condition nécessaire pour que $E(10^p s_n) = E(10^p s_{n+1})$) puis, si n ainsi obtenu ne convient pas, l'augmenter jusqu'à obtenir n_p .

2. Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite de réels non nuls. On pose $s_n = \sum_{k=0}^n u_k$ comme en **1**. On écrit $u_n = a_n c_n$ et on pose $b_n = \frac{c_{n+1}}{c_n}$. Soient les fonctions affines $f_k : x \rightarrow a_k + b_k x$ et leur composée $g_n = f_0 \circ f_1 \circ \dots \circ f_n$. Alors $g_n(x) = \frac{1}{c_0}(s_n + x c_{n+1})$. En effet g_n est a priori affine de la forme $g_n(x) = g_n(0) + b_0 b_1 \dots b_n x = g_n(0) + x \frac{c_{n+1}}{c_0}$ et telle que $g_n = g_{n-1} \circ f_n$, donc de même $g_n(0) = g_{n-1}(f_n(0)) = g_{n-1}(a_n) = g_{n-1}(0) + \frac{1}{c_0} a_n c_n = \dots = g_0(0) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{c_0} a_k c_k = \frac{1}{c_0} \sum_{k=0}^n a_k c_k$ (car $g_0 = f_0$ et $f_0(0) = a_0$).

En particulier $s_n = c_0 g_n(0)$ et $s_{n+1} = c_0 g_n(a_{n+1})$ (utile précédemment en fin de **1**, pour augmenter n).

Ce calcul de s_n par méthode de Hörner est adapté au cas où les a_n et les b_n ont des expressions simples comme ci-dessous.

3. La fraction $f(t) = \frac{1}{1+t^2} + \frac{1}{1+(1-t)^2}$, invariante par $t \rightarrow 1-t$, s'exprime en fonction de $s = t(1-t)$:

$$f(t) = \frac{3-2s}{2-2s+s^2} = \frac{(3-2s)(2+2s+s^2)}{(2+s^2)^2-4s^2} = \frac{6+2s-s^2-2s^3}{4+s^4} \quad \text{si } t \in [0,1] \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+1}} (6+2s-s^2-2s^3) s^{4n}$$

D'où par intégration terme à terme d'une série de fonctions continues normalement convergente sur $[0, 1]$

$$\pi = 2 \int_0^1 f(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \quad \text{avec} \quad u_n = \frac{(-1)^n}{4^{n+1}} \int_0^1 (12+4s-2s^2-4s^3) s^{4n} dt$$

On observe en passant que, comme $s \in [0, \frac{1}{4}]$ pour $t \in [0, 1]$, $12+4s-2s^2-4s^3 > 0$ pour $t \in [0, 1]$ et qu'on a donc affaire à une série alternée dont la valeur absolue du terme général décroît. De plus, comme $12+4s-2s^2-4s^3$ a pour maximum $\frac{205}{16}$ quand t décrit $[0, 1]$, maximum atteint pour $t = \frac{1}{2}$ avec $s(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$, on a par inégalité triangulaire¹ $|u_n| < \frac{205}{2^{2n+6}} J_{4n} < \frac{205}{2^{10n+6}}$ en posant

$$J_p = \int_0^1 t^p (1-t)^p dt \stackrel{\text{I.P.P.s}}{=} \dots p!^2 \int_0^1 \frac{t^{p+k}}{(p+k)!} \frac{(1-t)^{p-k}}{(p-k)!} dt \stackrel{\text{I.P.P.s}}{=} \dots = \frac{p!^2}{(2p+1)!} = \frac{p!}{2^p (2p+1)!}$$

On obtient ainsi

$$u_n = \frac{(-1)^n}{4^{n+1}} (12J_{4n} + 4J_{4n+1} - 2J_{4n+2} - 4J_{4n+3})$$

ce qui donne après mise en facteur de J_{4n} et réduction au même dénominateur

$$u_n = a_n c_n \quad \text{avec} \quad a_n = 330 + 1804n + 3066n^2 + 1640n^3, \quad c_n = \frac{(-2^{-6})^n (4n)!}{(8n+7)!} \quad \text{et} \quad b_n = \frac{c_{n+1}}{c_n} = -2^{-6} \prod_{j=4n+1}^{4n+4} \frac{j}{7+2j}$$

On est donc dans les conditions des paragraphes **1**. et **2**.

Comme la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est à termes rationnels non nuls, alternée et que la suite $(|u_n|)$ décroît vers 0, on obtient p décimales de sa somme irrationnelle π comme indiqué en **1**. et **2**, à partir d'une somme partielle $s_n = \sum_{k=0}^n u_k$: comme $|u_n| < \frac{205}{2^{10n+6}}$ on peut chercher $n \geq \frac{p}{3}$ et procéder comme en **2**. avec ici $c_0 = \frac{1}{105}$

On peut ainsi obtenir à partir d'OCaml et de la bibliothèque zarith (fondée sur Gnu gmp) et éventuellement d'un peu de parallélisme les 100 premiers millions de décimales de π en moins de 6 minutes sur MacBook Pro M1.

¹ inégalités strictes car la fonction $t \rightarrow s$ est continue et $t \rightarrow 12+4s-2s^2-4s^3$ non constante sur $[0, 1]$; voir **4**. pour un équivalent de J_p

4. D'une part d'après 3. $|u_n| < \frac{205}{2^{2n+6}} J_{4n}$ et $u_n \sim (-1)^n \frac{205}{2^{2n+6}} J_{4n}$ car $u_n = a_n c_n$ avec

$$a_n = 330 + 1804n + 3066n^2 + 1640n^3 \sim 1640n^3 \quad \text{et} \quad c_n = \frac{(-1)^n J_{4n}}{2^{2n}(8n+3)(8n+5)(8n+7)} \sim \frac{(-1)^n J_{4n}}{2^{2n+9}n^3}$$

D'autre part

$$\sqrt{p} 4^p J_p = \sqrt{p} 4^p \int_0^1 t^p (1-t)^p dt \stackrel{t=\frac{1}{2}(1+\frac{x}{\sqrt{p}})}{=} \int_0^{\sqrt{p}} \left(1 - \frac{x^2}{p}\right)^p dx$$

Or la suite croissante de fonctions continues sur \mathbf{R}_+ (strictement croissante sur \mathbf{R}_+^*)

$$x \longrightarrow \left(1 - \frac{x^2}{p}\right)^p \quad \text{si } x \in [0, \sqrt{p}] , \quad 0 \text{ sinon}$$

converge simplement sur \mathbf{R}_+ vers la fonction continue $x \rightarrow e^{-x^2}$. Donc par théorème de convergence monotone

$$\sqrt{p} 4^p J_p \stackrel{p \rightarrow \infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \text{en croissant strictement}$$

Donc

$$J_p < 2^{-(2p+1)} \sqrt{\frac{\pi}{p}} \quad \text{et} \quad J_p \stackrel{p \rightarrow \infty}{\sim} 2^{-(2p+1)} \sqrt{\frac{\pi}{p}}$$

Donc

$$|u_n| < \frac{205}{2^{10n+8}} \sqrt{\frac{\pi}{n}} \quad \text{et} \quad u_n \sim (-1)^n \frac{205}{2^{10n+8}} \sqrt{\frac{\pi}{n}}$$

5. On peut aussi en 4. ramener J_p à une intégrale de Wallis :

$$4^p J_p = 4^p \int_0^1 t^p (1-t)^p dt \stackrel{t=\frac{1}{2}(1+\sin \theta)}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^\alpha \theta d\theta \quad \text{avec} \quad \alpha = 2p+1$$

6. On peut enfin noter que, pour m entier naturel impair et $p \in \mathbf{N}$, $v_m(p) = \sum_{n=mp}^{m(p+1)-1} u_n = a_m(p) c_m(p)$ où a_m est un polynôme à coefficients entiers naturels de degré $4m-1$ et

$$c_m(p) = \frac{(-1)^p (4mp)!}{2^{6mp+3(m-1)} (8m(p+1)-1)!!}$$

avec

$$b_m(p) = \frac{c_m(p+1)}{c_m(p)} = -2^{-6m} \prod_{j=4mp+1}^{4mp+4m} \frac{j}{2j+8m-1}$$

et que

$$\sum_{n=0}^{m(q+1)-1} u_n = \sum_{p=0}^q v_m(p)$$

(somme par tranches de longueur m de la série initiale $\sum u_n$; la nouvelle série $\sum_{p \geq 0} v_m(p)$ est elle aussi alternée et la valeur absolue $|v_m(p)|$ de son terme général décroît vers 0)
et obtenir ainsi un calcul un peu plus rapide après avoir calculé le polynôme a_m .